



Inspectoratul Școlar Județean Timiș

Societatea de Științe Matematice din România

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapa Locală, județul Timiș**  
**5.02.2026**

**Clasa a V-a**  
**Barem de corectare și notare**

1. Se dau numerele:

$$A = 2^{2026} \cdot 3^{2026} \cdot 10 + 2^{2030} \cdot 3^{2026} - 6^{2026} \text{ și } B = 25^{1010} \cdot 5^{2^3} + 2 \cdot 5^{2027} + 25^{1013}$$

a) Arătați că  $A$  este pătrat perfect, iar  $A \cdot B$  este cub perfect.

b) Aflați ultimele 2029 cifre ale produsului  $A \cdot B$ .

**Soluție:**

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= 2^{2026} \cdot 3^{2026} \cdot 10 + 2^{2030} \cdot 3^{2026} - 6^{2026} = \\ &= 2^{2026} \cdot 3^{2026} \cdot 10 + 2^{2026} \cdot 2^4 \cdot 3^{2026} - 6^{2026} \dots\dots\dots 1p \\ A &= 6^{2026} \cdot 10 + 6^{2026} \cdot 16 - 6^{2026} \dots\dots\dots 1p \\ A &= 6^{2026} \cdot (10 + 16 - 1) = 6^{2026} \cdot 25 \dots\dots\dots 1p \\ A &= (6^{1013})^2 \cdot 5^2 = (6^{1013} \cdot 5)^2, \text{ deci } A \text{ este pătrat perfect} \dots\dots\dots 2p \\ B &= 25^{1010} \cdot 5^{2^3} + 2 \cdot 5^{2027} + 25^{1013} = 25^{1010} \cdot 5^8 + 2 \cdot 5^{2027} + 25^{1013} \dots\dots\dots 1p \\ B &= (5^2)^{1010} \cdot 5^8 + 2 \cdot 5^{2027} + (5^2)^{1013} = 5^{2020} \cdot 5^8 + 2 \cdot 5^{2027} + 5^{2026} = \\ &= 5^{2028} + 2 \cdot 5^{2027} + 5^{2026} \dots\dots\dots 3p \\ B &= 5^{2026} \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^{2026} \cdot 5 + 5^{2026} = 5^{2026} \cdot (25 + 10 + 1) = 5^{2026} \cdot 36 \dots\dots\dots 2p \\ A \cdot B &= 6^{2026} \cdot 25 \cdot 5^{2026} \cdot 36 = 6^{2026} \cdot 5^2 \cdot 5^{2026} \cdot 6^2 = 6^{2028} \cdot 5^{2028} \dots\dots\dots 2p \\ A \cdot B &= 30^{2028} = (30^{676})^3 \text{ care este cub perfect} \dots\dots\dots 2p \\ \text{b) } A \cdot B &= 30^{2028} = 3^{2028} \cdot 10^{2028} \dots\dots\dots 1p \\ \text{Ultimele 2028 cifre ale numărului } A \cdot B &\text{ sunt toate zero} \dots\dots\dots 1p \\ \text{Cifra de pe poziția 2029 este } U(3^{2028}) &= 1 \dots\dots\dots 2p \\ \text{Deci, ultimele 2029 cifre ale numărului } A \cdot B &\text{ sunt formate din cifra 1, urmată de cele 2028} \\ \text{zerouri} \dots\dots\dots 1p \end{aligned}$$

2. Un număr natural de trei cifre împărțit la răsturnatul său dă câtul 3 și restul 175.  
Diferența dintre cifra sutelor și cifra unităților numărului dat este 7. Determinați numărul.



**Soluție:**

$$\overline{abc} = 3 \cdot \overline{cba} + 175, 175 < \overline{cba} \text{ și } a - c = 7, a, b, c - \text{cifre}, a \neq 0, c \neq 0 \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{Din } a - c = 7 \text{ rezultă că } a = 7 + c, \text{ deci } c = 1 \text{ sau } c = 2 \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{Dacă } c = 1, a = 8 \text{ și cum } \overline{8b1} = 3 \cdot \overline{1b8} + 175, \text{ rezultă că}$$

$$801 + 10b = 3 \cdot (108 + 10b) + 175 \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{Obținem } 302 = 20b, \text{ dar } b \text{ e cifră, ca urmare în acest caz nu avem soluție} \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{Dacă } c = 2, a = 9 \text{ și cum } \overline{9b2} = 3 \cdot \overline{2b9} + 175, \text{ rezultă că}$$

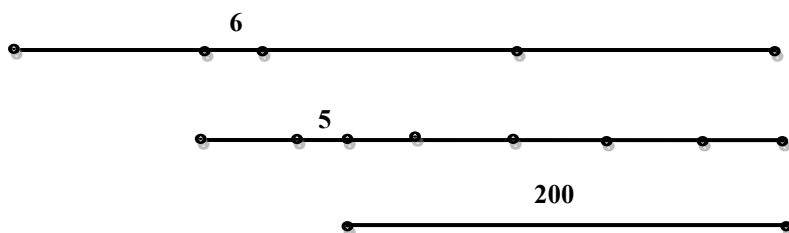
$$902 + 10b = 3 \cdot (209 + 10b) + 175 \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{Obținem } 100 = 20b, \text{ deci } b = 5 \dots\dots\dots 3p$$

$$\text{Așadar, numărul este: } 952 \dots\dots\dots 2p$$

3. Un elev citește o carte în trei zile. În prima zi citește cu 6 pagini mai puțin decât o treime din numărul total de pagini. A doua zi citește cu 5 pagini mai mult decât o șesime din numărul paginilor rămase, iar a treia zi citește restul de 200 de pagini. Câte pagini are cartea?

**Soluție:**



Din figură se observă că  $200 + 5 = 205$  reprezintă cinci șesimi din numărul de pagini rămase de citit după prima zi.....3p

Deci, o șesime înseamnă  $205 : 5 = 41$  pagini.....3p

Numărul paginilor rămase după prima zi reprezintă șase șesimi, adică  $41 \cdot 6 = 246$  pagini.....3p

Cele 246 de pagini reprezintă două treimi din total plus încă 6 pagini.....3p

Două treimi din total este egal cu  $246 - 6 = 240$  pagini.....3p

O treime din total este egală cu  $240 : 2 = 120$  pagini.....3p

Numărul total de pagini este egal cu  $120 \cdot 3 = 360$  .....2p



- 4. a)** La început, pe tablă sunt scrise numerele 1995, 1996, 1997, ..., 2024, 2025, 2026. Maria alege două dintre numerele scrise pe tablă, le șterge, apoi scrie pe tablă diferența dintre cele două numere șterse. Maria repetă aceste operații până când pe tablă rămâne un singur număr. Arătați că, indiferent de alegerile Mariei, numărul rămas este mereu par.
- b)** Determinați numerele naturale  $x$  și  $y$  pentru care  $x^{y-2026} + x = 2027$ .

**Soluție:**

- 4. a)** Suma numerelor de pe tablă este un număr par ..... **2p**  
Pe tablă rămâne mereu un număr par de numere impare (la orice operație, numărul de numere impare fie scade cu 2, fie rămâne neschimbat)..... **3p**  
Dacă Maria șterge două numere care au aceeași paritate, atunci diferența numerelor șterse este pară, ca urmare suma numerelor rămase e pară..... **5p**  
Dacă Maria șterge două numere care au parități diferite, atunci diferența numerelor șterse este impară, ca urmare suma numerelor rămase e pară..... **5p**  
În concluzie, numărul rămas pe tablă este par..... **5p**
- b)** Orice număr ridicat la o putere nenulă nu își schimbă paritatea, deci dacă  $y - 2026 \neq 0$ ,  $x^{y-2026} + x$  este un număr par..... **5p**  
Deoarece 2027 este impar, cazul  $y - 2026 \neq 0$  este imposibil..... **3p**  
Dacă  $y - 2026 = 0$ , obținem  $y = 2026$ ..... **1p**  
Atunci  $1 + x = 2027$ , de unde  $x = 2026$ ..... **1p**



INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN TIMIȘ  
Str. Dr. Liviu Gabor nr. 1, 300004, Timișoara,  
Tel +40 (0)256 305799, Fax2mail +40 (0)371 627683  
[registratura@isitm.ro](mailto:registratura@isitm.ro), [www.isi.tm.edu.ro](http://www.isi.tm.edu.ro)  
Operator de date cu caracter personal nr.18818



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI  
CERCETĂRII

Inspectoratul Școlar Județean Timiș

Societatea de Științe Matematice din România

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapa Locală, județul Timiș**  
**5.02.2026**

**Clasa a VI-a**  
**Barem de corectare și notare**

1. O mulțime nevidă  $A \subset \mathbb{N}^*$  o vom numi *pătratică* dacă suma elementelor sale este egală cu pătratul numărului de elemente.
- Determinați mulțimile pătratice cu 3 elemente.
  - Demonstrați că orice mulțime pătratică conține cel puțin un număr impar.

*Supliment Gazeta Matematică nr. 10/2025*

**Soluție:**

- $A = \{a, b, c\}$ ,  $a + b + c = 9$  ..... 1p  
 $\{1, 2, 6\}$ ,  $\{1, 3, 5\}$ ,  $\{2, 3, 4\}$  ..... 4p
- Presupunem prin reducere la absurd că  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , unde  $n \in \mathbb{N}^*$  și  $x_1, x_2, \dots, x_n$  numere naturale pare și  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n^2$  ..... 4p  
 $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq 2 + 4 + \dots + 2n$  ..... 4p  
 $n^2 \geq n(n+1)$ , ..... 4p  
 $n \geq n+1$ , contradicție ..... 2p  
Finalizare: orice mulțime pătratică conține cel puțin un număr impar ..... 1p

2. a) Fie  $p$  un număr prim mai mare decât 5. Determinați ultima cifră a lui  $p^4$ .
- b) Aflați numerele prime  $p$  și  $q$ , știind că  $p^4 + q^4 = 29186$ .

**Soluție:**

- Fie  $p$  un număr prim,  $p > 5 \Rightarrow U(p) \in \{1, 3, 7, 9\}$  ..... 2p  
 $\Rightarrow U(p^2) \in \{1, 9\}$  ..... 2p  
 $\Rightarrow U(p^4) = 1$  ..... 1p
- Dacă  $p > 5$  și  $q > 5 \Rightarrow U(p^4 + q^4) = 2$ , contradicție ..... 2p  
Dacă  $p < 5$  atunci  $q \geq 5$  ..... 2p  
Dacă  $p = 2 \Rightarrow q^4$  este par, contradicție ..... 3p  
Dacă  $p = 3 \Rightarrow U(q^4) = 5$ , contradicție ..... 3p  
Dacă  $p = 5 \Rightarrow q^4 = 28561 \Rightarrow q = 13$  ..... 4p  
Finalizare:  $p = 5$  și  $q = 13$  sau  $p = 13$  și  $q = 5$  ..... 1p



3. Fie punctele coliniare  $A, B, C, D$ , în această ordine, astfel încât  $AB = 5^x$  m,  $BC = 2 \cdot 5^{x+1}$  m, iar  $CD = 32 \cdot 5^x$  m.
- a) Arătați că  $2 \cdot AB + 3 \cdot BC = CD$ .
- b) Dacă  $M$  este mijlocul lui  $BC$ , iar  $N$  aparține segmentului  $CD$  astfel încât  $2 \cdot CN = 3 \cdot ND$  și  $MN = 605$  m, determinați lungimea segmentului  $AD$ .

**Soluție:**

a)  $2 \cdot AB + 3 \cdot BC = 2 \cdot 5^x + 3 \cdot 2 \cdot 5^{x+1} = 32 \cdot 5^x = CD$  ..... 5p

b)  $2 \cdot CN = 3 \cdot ND \Leftrightarrow 5 \cdot CN = 3 \cdot (CN + ND) \Leftrightarrow 5 \cdot CN = 3 \cdot CD$  ..... 2p

$\Rightarrow CN = \frac{3}{2} \cdot 32 \cdot 5^x = 96 \cdot 5^{x-1}$  m ..... 3p

$MC = BC : 2 = 5^{x+1}$  m ..... 3p

$MN = MC + CN = 121 \cdot 5^x$  m ..... 3p

$MN = 605$  m  $\Rightarrow 121 \cdot 5^{x-1} = 605 \Rightarrow x = 2$  ..... 3p

$AD = AB + BC + CD = 1075$  m ..... 1p

4. Măsurile în grade a  $n$  unghiuri în jurul unui punct,  $n \geq 3$ , sunt exprimate prin numere pare consecutive. Determinați măsurile acestor unghiuri. Câte soluții are problema?

**Soluție:**

Fie  $u^\circ$  măsura celui mai mic dintre ele  $\Rightarrow u^\circ + (u+2)^\circ + (u+4)^\circ + \dots + [u+2(n-1)]^\circ = 360^\circ$  .... 2p

$\Rightarrow n \cdot u^\circ + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2^\circ = 360^\circ$  ..... 2p

$\Rightarrow n(u+n-1)^\circ = 360^\circ$  ..... 1p

$\Rightarrow n$  și  $u+n-1$  divizori ai lui 360 ..... 1p

$n$  și  $u+n-1$  au parități diferite ..... 2p

Cum  $n < u+n-1 \Rightarrow n^2 < n(u+n-1) = 360 \Rightarrow n < 19$  ..... 1p

Dacă  $n$  – par  $\Rightarrow n = 8$  ..... 1p

$\Rightarrow u = 38$  ..... 1p

Analiza celorlalte cazuri care nu convin pentru  $n$  par ..... 1p

Dacă  $n$  – impar

$\Rightarrow n = 3 \Rightarrow u = 118$  ..... 2p

$\Rightarrow n = 5 \Rightarrow u = 72$  ..... 2p

$\Rightarrow n = 9 \Rightarrow u = 32$  ..... 2p

$\Rightarrow n = 15 \Rightarrow u = 10$  ..... 2p

$\Rightarrow$  problema are 5 soluții:

3 unghiuri cu măsurile:  $118^\circ, 120^\circ, 122^\circ$  ..... 2p

5 unghiuri cu măsurile:  $68^\circ, 70^\circ, 72^\circ, 74^\circ, 76^\circ$  ..... 2p

8 unghiuri cu măsurile:  $38^\circ, 40^\circ, 42^\circ, 44^\circ, 46^\circ, 48^\circ, 50^\circ, 52^\circ$  ..... 2p

9 unghiuri cu măsurile:  $32^\circ, 34^\circ, \dots, 48^\circ$  ..... 2p

15 unghiuri cu măsurile:  $10^\circ, 12^\circ, \dots, 38^\circ$  ..... 2p



INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN TIMIȘ  
Str. Dr. Liviu Gabor nr. 1, 300004, Timișoara,  
Tel +40 (0)256 305799, Fax2mail +40 (0)371 627683  
[registratura@isjtm.ro](mailto:registratura@isjtm.ro), [www.isjtm.edu.ro](http://www.isjtm.edu.ro)  
Operator de date cu caracter personal nr.18818



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI  
CERCETĂRII

NOTĂ: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.



Inspectoratul Școlar Județean Timiș

Societatea de Științe Matematice din România

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapa Locală, județul Timiș**  
**5.02.2026****Clasa a VII-a**  
**Barem de corectare și notare**

**(10p) 1. a.)** Fie șirul de numere reale:  $\sqrt{12}; \sqrt{45}; \sqrt{78}; \dots; \sqrt{20262027}; \dots$ . Al câtelea termen din șir este numărul  $\sqrt{20262027}$ ? Justificați răspunsul dat!

**(10p) b.)** Să se determine numerele întregi  $m$  și  $n$  astfel încât:

$$\sqrt{4 - 2\sqrt{5} - \sqrt{5}(2 - \sqrt{5})} = m + n\sqrt{5}.$$

**Soluție: a.)** Deduce regula de scriere a șirului: termenii sunt de forma  $\sqrt{(3n-2)(3n-1)}$ ,

**5p**pentru  $n \in \mathbb{N}^*$ Identifică poziția numărului  $\sqrt{20262027}$ , ca fiind egală cu  $2028:3 = 676$ **5p**

**b.)**  $\sqrt{4 - 2\sqrt{5} - \sqrt{5}(2 - \sqrt{5})} = \sqrt{2(2 - \sqrt{5}) - \sqrt{5}(2 - \sqrt{5})} = \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} = |2 - \sqrt{5}|$

**5p**

$$\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2 \Rightarrow |2 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2$$

**2p**

Cum  $\sqrt{4 - 2\sqrt{5} - \sqrt{5}(2 - \sqrt{5})} = m + n\sqrt{5} \Leftrightarrow -2 + \sqrt{5} = m + n\sqrt{5}$  și  $m, n \in \mathbb{Z}$ , atunci

**3p**

$$m = -2, n = 1$$

**(15p) 2. a.)** Fie numărul  $N = \sqrt{\frac{1}{1^2 \cdot 2} - \frac{1}{1 \cdot 2^2}} + \sqrt{\frac{1}{2^2 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 3^2}} + \dots + \sqrt{\frac{1}{2025^2 \cdot 2026} - \frac{1}{2025 \cdot 2026^2}}$ .

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $x^2 = 2026 \cdot N$ .

**(15p) b.)** Fie numerele:

$$a = 2026^{-1} + 2025^{-1} + \dots + 5^{-1} + 4^{-1} \text{ și } b = \frac{1}{1 + 2025^{-1}} + \frac{1}{1 + 2024^{-1}} + \dots + \frac{1}{1 + 4^{-1}} + \frac{1}{1 + 3^{-1}}.$$

Determinați partea întreagă a numărului  $\sqrt{a+b}$ .

**Soluție: a.)** Calculează fiecare termen al sumei astfel:

$$\sqrt{\frac{1}{n^2(n+1)} - \frac{1}{n(n+1)^2}} = \sqrt{\frac{(n+1)-1}{n^2(n+1)^2}} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^* \quad 5p$$

$$N = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2025} - \frac{1}{2026}\right) = 1 - \frac{1}{2026} = \frac{2025}{2026} \quad 5p$$

$$x^2 = 2026 \cdot N \Leftrightarrow x^2 = 2025 \quad 3p$$

Mulțimea soluțiilor ecuației este  $S = \{-45; 45\}$  2p

$$\text{b.) } a = \frac{1}{2026} + \frac{1}{2025} + \frac{1}{2024} + \dots + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \quad 2p$$

$$b = \frac{2025}{2026} + \frac{2024}{2025} + \frac{2023}{2024} + \dots + \frac{5}{6} + \frac{4}{5} + \frac{3}{4} \quad 3p$$

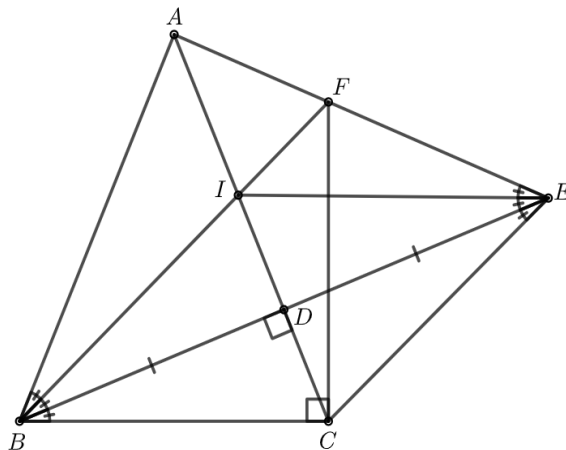
Observă că ambele sume au  $2026 - 4 + 1 = 2025 - 3 + 1 = 2023$  termeni 2pEfectuând suma  $a + b$  termen cu termen obține

$$a + b = \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 + 1}_{2023 \text{ termeni}} = 2023 \quad 5p$$

$$\text{Cum } 44 = \sqrt{1936} < \sqrt{2023} < \sqrt{2025} = 45 \Rightarrow \lceil \sqrt{a+b} \rceil = \lceil \sqrt{2023} \rceil = 44 \quad 3p$$

**(20p) 3.** În triunghiul  $ABC$ , cu  $AB = AC$ , ducem  $BD \perp AC$ ,  $D \in AC$  și notăm cu  $E$  simetricul lui  $B$  față de  $D$ . Bisectoarea unghiului  $ABE$  intersectează pe  $AE$  în  $F$ . Știind că  $BF \parallel CE$ , demonștrăți că  $CF \perp BC$ .

(Supliment Gazeta Matematică Seria B, Nr. 9/2025)

**Soluție:**



Identifică  $AC$  mediatoarea segmentului  $BE$ , deci  $\triangle ABE$  și  $\triangle BCE$  isoscele 2p

$I$  – centrul cercului înscris în  $\triangle ABE$ , unde  $BF \cap AD = \{I\}$ , deci  $EI$  – bisect.  $\angle AEB$ , 3p

$\angle ABI \equiv \angle IBE \equiv \angle IEB \equiv \angle AEI$  (jumătăți de unghiuri congruente)

Cum  $BI \parallel CE$ ,  $BE$  - secantă  $\Rightarrow \angle IBE \equiv \angle BEC$  2p

Demonstrează că  $BE$  – bisect.  $\angle ABI$ , respectiv  $\angle CEI$  2p

Deduce că  $BCEI$  romb, de unde  $EI \equiv BC$  (1) 2p

$\triangle ABC \equiv \triangle AEC$  (isoscele)  $\Rightarrow \angle ABC \equiv \angle ACE \equiv \angle AEC$  3p

Cum  $FI \parallel CE$  și  $\angle AEC \equiv \angle ACE$ , deduce că  $CEFI$  trapez isoscel, de unde  $FC \equiv EI$  (2)

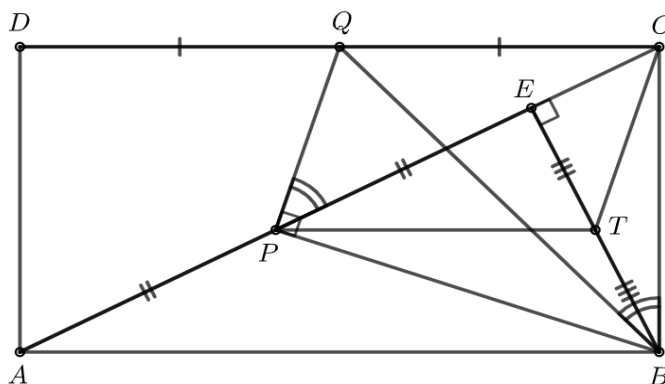
Determină că măsura unghiului  $\angle IBC$  egală cu  $45^\circ$  (3) 4p

Deduce din relațiile (1), (2) și (3) că  $\triangle BCF$  dr. isoscel, cu  $\angle BCF = 90^\circ$ , deci  $BC \perp CF$  2p

4. Fie  $ABCD$  un dreptunghi și  $Q$  mijlocul laturii  $DC$ . Dacă  $BE \perp AC$ , unde  $E \in AC$ , și  $P$  este mijlocul segmentului  $AE$ , demonștrăți că:

(15p) a.)  $BP \perp PQ$ .

(5p) b.)  $\angle QPC \equiv \angle QBC$ .



**Soluție: a.)** Fie punctul  $T$  mijlocul segmentului  $BE$ .

În  $\triangle AEB$ , avem că  $PT$  este linie mijlocie  $\Rightarrow \begin{cases} PT \parallel AB \text{ și cum } AB \parallel CD \Rightarrow PT \parallel QC & 2p \\ PT = \frac{AB}{2} \text{ și cum } QC = \frac{AB}{2} \Rightarrow PT \equiv QC & 2p \end{cases}$

$\Rightarrow$  patrulaterul  $QCTP$  este paralelogram  $\Rightarrow CT \parallel PQ$  2p



INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN TIMIȘ

Str. Dr. Liviu Gabor nr. 1, 300004, Timișoara,  
Tel +40 (0)256 305799, Fax2mail +40 (0)371 627683

[registratura@isjtm.ro](mailto:registratura@isjtm.ro), [www.isj.tm.edu.ro](http://www.isj.tm.edu.ro)

Operator de date cu caracter personal nr.18818



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI  
CERCETĂRII

$$\text{Dar } \left. \begin{array}{l} PT \parallel AB \\ AB \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow PT \perp BC \quad \left. \begin{array}{l} EB \perp PC \text{ si cum } EB \cap BT = \{T\} \end{array} \right\} \Rightarrow T \text{ ortocentru în } \triangle PBC, \quad 5p$$

de unde  $CT \perp PB$  2p

Dar  $CT \parallel PQ$ , deduce că  $PQ \perp PB$  2p

**b.)** Patrulaterul  $QPBC$ , cu  $\sphericalangle QPB = 90^\circ$  și  $\sphericalangle QBC = 90^\circ$ , este un patrulater inscriptibil, în  
care  $\sphericalangle QBC \equiv \sphericalangle QPC$  5p

**NOTĂ:** Orice altă soluție corectă de rezolvare a fiecărei probleme se va puncta corespunzător.



Inspectoratul Școlar Județean Timiș

Societatea de Științe Matematice din România

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapa Locală, județul Timiș**  
**5.02.2026**

**Clasa a VIII-a**  
**Barem de corectare și notare**

**(20p) 1.** Fie numerele  $a = \sqrt{2^{2026} - 2^{1015} + 2^{1014} + 1}$  și  $b = \sqrt{2^{2026} - 2^{1014} + 2^{1015} + 1}$ .

a) Arătați că  $a$  și  $b$  sunt numere naturale impare consecutive.

b) Comparați numerele  $5b - 3a$  și  $\sqrt{7^{676}}$ .

**Soluție:**

**a)**

$$2^{2026} - 2^{1015} + 2^{1014} + 1 = 2^{2026} - 2^{1014}(2 - 1) + 1 = \dots\dots\dots 2p$$

$$= (2^{1013})^2 - 2 \cdot 2^{1013} + 1 = (2^{1013} - 1)^2 \dots\dots\dots 3p$$

$$a = |2^{1013} - 1| = 2^{1013} - 1 \dots\dots\dots 2p$$

$$2^{2026} - 2^{1014} + 2^{1015} + 1 = 2^{2026} + 2^{1014}(2 - 1) + 1 = \dots\dots\dots 2p$$

$$= (2^{1013})^2 + 2 \cdot 2^{1013} + 1 = (2^{1013} + 1)^2, \text{ deci } b = 2^{1013} + 1 \dots\dots\dots 4p$$

Numerele  $a$  și  $b$  sunt numere naturale impare, iar  $a + 2 = b$ , deci  $a$  și  $b$  sunt numere naturale impare consecutive. .... 2p

**b)**

$$5b - 3a = 5 \cdot (2^{1013} + 1) - 3 \cdot (2^{1013} - 1) = 2 \cdot 2^{1013} + 8 = 8 + 2^{1014} = 8 + 8^{338} \dots\dots\dots 3p$$

$$\sqrt{7^{676}} = 7^{338}, 8 + 8^{338} > 7^{338}, \text{ deci } 5b - 3a > \sqrt{7^{676}} \dots\dots\dots 2p$$

**(20p) 2.** În tetraedrul  $ABCD$  notăm cu  $M, N, P, Q$  mijloacele muchiilor  $AD, AB, BC$  respectiv  $CD$ . Se știe că  $m(\sphericalangle(AC, BD)) = 90^\circ$ .

a) Arătați că  $m(\sphericalangle MNP) = 90^\circ$ .

b) Arătați că, dacă  $AC=BD$ , atunci  $MNPQ$  este pătrat.

*Supliment G.M., octombrie 2025*

**Soluție:**

a)  $MN$  linie mijlocie în  $\triangle ABD \Rightarrow MN \parallel BD \dots\dots\dots 2p$

$NP$  linie mijlocie în  $\triangle ABC \Rightarrow NP \parallel AC \dots\dots\dots 2p$



- $m(\sphericalangle MNP) = m(\sphericalangle(AC, BD)) = 90^\circ \dots\dots\dots 3p$
- b)  $MN \parallel BD, PQ \parallel BD \Rightarrow MN \parallel PQ$  (1).....2p
- $MQ \parallel AC, NP \parallel AC \Rightarrow MQ \parallel NP$  (2).....2p
- Din (1) și (2) rezultă  $MNPQ$  paralelogram.....2p
- $m(\sphericalangle MNP) = 90^\circ \Rightarrow MNPQ$  dreptunghi.....2p
- $MN = \frac{1}{2} \cdot BD, NP = \frac{1}{2} \cdot AC, BD = AC \Rightarrow MN = NP$ , deci  $MNPQ$  pătrat.....5p

**(20p) 3.** Se consideră cubul  $ABCD A' B' C' D'$  cu muchia  $AB = a$  cm și punctul M mijlocul muchiei  $D' C'$ .

- a) Demonstrați că  $AD \parallel (BCM)$ .
- b) Calculați de la punctul D la planul  $(BCM)$ .
- c) Dacă distanța dintre dreptele  $AD$  și  $BM$  este egală cu  $4\sqrt{5}$  cm, determinați  $a$ .

**Soluție:**

- a)  $AD \parallel BC, BC \subset (BCM), AD \not\subset (BCM) \Rightarrow AD \parallel (BCM) \dots\dots\dots 3p$
- b) Fie  $DE \perp CM, E \in CM$
- $BC \perp (DCC'), DE \subset (DCC') \Rightarrow BC \perp DE \Rightarrow DE \perp BC \dots\dots\dots 2p$
- $DE \perp CM, DE \perp BC \Rightarrow DE \perp (BCM) \dots\dots\dots 2p$
- În  $\triangle CC'M$  dreptunghic în  $C'$ ,  $CM = \sqrt{C'C^2 + C'M^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \dots\dots\dots 2p$
- Scriind aria triunghiului CDM în două moduri se obține  $CM \cdot DE = CD \cdot d(M, DC) \dots\dots 2p$
- $\Rightarrow CM \cdot DE = DC \cdot CC' \Rightarrow DE = \frac{CD \cdot CC'}{CM} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$  cm.....3p
- c)  $AD \parallel (BCM)$  și  $AD \not\parallel BM \Rightarrow d(AD, BM) = d(AD, (BCM)) = d(D, (BCM)) =$
- $DE \dots\dots\dots 3p$
- $DE = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$  cm  $\Rightarrow \frac{2a\sqrt{5}}{5} = 4\sqrt{5} \Rightarrow a = 10 \dots\dots\dots 3p$

**(30p) 4. a)** Dacă  $x, y \in (0, \infty)$  și  $k \in \mathbb{N}^*$ , demonstrați că  $\sqrt{(x+k)(y+k)} \geq k + \sqrt{xy}$ .

b) Demonstrați că:

$$\frac{x+y+1}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+1)(y+1)}} + \frac{x+y+2}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+2)(y+2)}} + \dots + \frac{x+y+2026}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+2026)(y+2026)}} \geq 2026, \text{ pentru orice numere reale } x, y \in (0, \infty).$$



**Soluție:**

a)  $\sqrt{(x+k)(y+k)} \geq k + \sqrt{xy} \Leftrightarrow (x+k)(y+k) \geq k^2 + xy + 2k\sqrt{xy}, \forall x, y \in (0, \infty)$  și  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \dots \dots \dots 3p$

Prin calcul se obține  $xk + yk \geq 2k\sqrt{xy} \dots \dots \dots 3p$

Inegalitatea inițială este echivalentă cu  $(\sqrt{xk} - \sqrt{yk})^2 \geq 0, \forall x, y \in (0, \infty), \forall k \in \mathbb{N}^*$ , care este adevărată.  $\dots \dots \dots 4p$

b) Din a) rezultă  $\sqrt{(x+k)(y+k)} - \sqrt{xy} \geq k$ , de unde  $\frac{(x+k)(y+k)-xy}{\sqrt{(x+k)(y+k)+\sqrt{xy}}} \geq k \dots \dots \dots 5p$

Se obține  $\frac{xk+yk+k^2}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+k)(y+k)}} \geq k$ , deci  $\frac{x+y+k}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+k)(y+k)}} \geq 1$ , pentru  $x, y > 0$  și  $k \in \mathbb{N}^*, \dots \dots \dots 5p$

Pentru  $k \in \{1, 2, 3, \dots, 2026\}$  se obțin inegalitățile:

$$\frac{x+y+1}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+1)(y+1)}} \geq 1, \frac{x+y+2}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+2)(y+2)}} \geq 1, \dots, \frac{x+y+2026}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+2026)(y+2026)}} \geq 1 \dots \dots \dots 5p$$

Prin însumarea inegalităților anterioare se obține inegalitatea:

$$\frac{x+y+1}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+1)(y+1)}} + \frac{x+y+2}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+2)(y+2)}} + \dots + \frac{x+y+2026}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+2026)(y+2026)}} \geq 2026, \forall x, y \in (0, \infty) \dots \dots \dots 5p$$